

## МОДЕЛЬ РУХУ АВТОМОБІЛЯ ПО КРИВОЛІНІЙНІЙ ТРАСІ

**Рогатинський Р. М.**, *д-р тех. наук, професор кафедри автомобілів Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, м. Тернопіль, Україна; e-mail: rogatynskiy@gmail.com; ORCID: 0000-0001-8536-4599;*

**Ляшук О. Л.**, *д-р тех. наук, професор кафедри автомобілів Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, м. Тернопіль, Україна; e-mail: oleglashuk@ukr.net; ORCID: 0000-0003-4881-8568;*

**Гевко І. Б.**, *д-р тех. наук, професор кафедри автомобілів Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, м. Тернопіль, Україна; e-mail: gevkoivan1@ukr.net; ORCID: 0000-0001-5170-0857;*

**Хорошун Р. В.**, *аспірант кафедри автомобілів Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, м. Тернопіль, Україна.*

*У статті розглядається питання забезпечення курсової стійкості автомобіля на етапі складання та вибору траєкторії руху автомобіля по площинній трасі із умови мінімізації негативних динамічних впливів. Досягнення вказаної мети забезпечується встановленням закономірностей вибору швидкісного режиму руху та раціональної траєкторії руху автомобіля і, відповідно, закону зміни кута повороту коліс залежно від параметрів траси, зокрема її кривини. Вихідними даними для розробленої моделі є параметри траси та її діляниць згідно технічних вимог на будівництво та дистанційного зондування, за якими визначаються біжучі параметри кривини траси та її смуг.*

*Траєкторія руху автомобіля задається як параметрична функція від шляху пройденого задніми колесами із врахуванням зміни кута нахилу коліс по трасі, за якою визначено траєкторії руху коліс і автомобіля та їх кривини. Узгодження кривин траси та траєкторії руху дозволило встановити безпечні кінематичні режими руху автомобіля по криволінійній трасі.*

*Рух по криволінійній траєкторії призводить до перерозподілу сил та моментів, що діятимуть на автомобіль. Вони врівноважуються реакціями на чотирьох колесах, і встановлення кінематичного та динамічного режиму руху дозволяє в подальшому уточнити динаміку автомобіля в цілому, використовуючи ітераційний процес. На подальших ітераціях уточнюється перерозподіл сил на реальні колеса і від велосипедної моделі переходять до моделі чотирьох колісного автомобіля з уточненням кінематичного та динамічного режимів руху автомобіля.*

*Побудована модель перебудови руху автомобіля із однієї смуги на іншу за гладкою функцією переходу на основі гіперболічних функцій. Встановлені особливості кінематичного та динамічного режиму руху за запропонованим переходом із вибором кривої переходу та встановленням безпечних параметрів ділянок переходу залежно від швидкісного режиму руху автомобіля.*

**Ключові слова:** *модель, автомобіль, кут нахилу коліс, курсова стійкість автомобілі, кривина траси.*

**DOI: 10.33815/2313-4763.2021.2.25.038-047**

**Постановка задачі.** Питання курсової стійкості руху автомобілів при русі по криволінійній трасі з урахуванням змінних у часі сил, є актуальним, оскільки змінна динаміки автомобіля при цьому призводить до зміни параметрів стійкості автомобіля. Збереження курсової стійкості автомобіля забезпечується відповідністю режимів та вибраної траєкторії руху топології траси, стану дорожнього покриття, погоднім умовам тощо. Поєднання цих факторів є важливим елементом розробки відповідних математичних моделей, потреба яких з появою автоматизованих систем правління автомобілем суттєво зросла.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** У відомих працях проведено детальні дослідження курсової стійкості для прямолінійного та колового руху автомобіля, його входження в повороти, [1–6]. Зокрема детально розглянута траєкторія автомобіля при входженні та русі по круговій траєкторії [1], розкрито вплив масових та динамічних факторів на курсову стійкість легкового автомобіля [2], побудовані фазові портрети та траєкторії руху центра мас автомобіля [4]. Детальний аналіз стійкості автомобіля у неусталених режимах руху наведено в [5–7]. Проте низка питань, що стосуються раціонального, з точки зору забезпечення курсової стійкості автомобіля, вибору

функціонального зв'язку зміни кута повороту коліс та параметрів траєкторії руху автомобіля із режимами руху та параметрами розташування траси, розкрито недостатньо.

Слід відмітити, що в сучасних автомобілях для стабілізації положення автомобіля в процесі виконання маневрів використовується система ESP, що стежить за траєкторією автомобіля та її відповідністю куту повороту керма та в разі відхилення вносить керувальні впливи пригальмовуванням коліс. Зокрема у [8] наведено порівняльну характеристику траєкторії руху автомобіля з системою ESP і без неї по керованості та стійкості при заносі автомобіля на дорозі, де розкрито перевагу її використання. Проте система ESP, протидіючи недостатній чи надмірній обертальності, не забезпечує вибору оптимальної траєкторії, в цілому, при русі по криволінійним ділянкам, перебудові на іншу смугу. А тому вибір оптимальної траєкторії руху автомобіля залежно від кривини траси, характеру переміщення та перебудови по смугах із узгодженням швидкісного режиму його руху є актуальною задачею.

**Мета досліджень** полягає в забезпеченні курсової стійкості автомобіля на етапі складання та вибору траєкторії руху автомобіля із умови мінімізації негативних динамічних впливів. Досягнення вказаної мети забезпечується встановленням закономірностей вибору швидкісного режиму руху та раціональної траєкторії руху автомобіля і, відповідно, закону зміни кута повороту коліс, із параметрами траси автомобіля, зокрема її кривини.

**Викладення основного матеріалу дослідження.** Розвиток систем глобального позиціонування (GPS) та дистанційного зондування Землі дозволяє на новому рівні з високою точністю моделювати розміщення траси, відслідковувати її зміни, а також визначати на ній координати рухомих об'єктів, що дозволяє розробляти ефективні моделі руху автомобіля залежно від умов на трасі [9, 10] в т.ч. режимі реального часу.

Нехай у базовій (нерухомій) системі координат  $OXYZ$ , що нерухомо зв'язана з трасою задано рівняння траси в параметричному виді, як функція шляху по її середній лінії:

$$X = X(l); Y = Y(l); Z = Z(l), \quad (1)$$

де  $l$  – параметр довжини шляху по серединній лінії траси.

Для випадку площинного розміщення траси задача визначення траєкторії руху автомобіля перетвориться у двовимірну, де напрямком осей  $OX$  та  $OY$  визначатимемо за географічними координатами, причому вісь  $OX$  спрямовується в сторону руху, а початкові значення параметрів траси приймемо  $X(0) = 0; Y(0) = 0$ . Вектор напрямку траси на початку руху  $l_0 = l(t_0) = 0$  (у початковий момент часу  $t_0 = 0$ ), буде  $\vec{l}_0(0) = X'_l(0) \cdot \vec{i} + Y'_l(0) \cdot \vec{j}$  і з віссю  $OX$  утворюватиме кут  $\xi_0$ .

Кривина траси в площині  $OXY$  буде

$$K(l) = \frac{|X'_l Y''_l - Y'_l X''_l|}{(X_l'^2 + Y_l'^2)^{(3/2)}}. \quad (2)$$

У загальному випадку, траєкторія траси визначається технічними вимогами на будівництво і її можна розбити на такі ділянки: прямолінійні з нульовою кривиною; колові постійної кривини; перехідні, по клотоїді із лінійною зміною кривини; перехідні із іншим законом зміни кривини.

Нехай траса поділена на  $n$  відрізків (ділянок) довжини яких  $\Delta l_{i-1,i} = l_i - l_{i-1}$  і на яких кривина змінюється згідно залежності:

$$K_i(l) = a_i + b_i(l - l_{i-1}), \quad (3)$$

де для прямолінійних ділянок  $a_i = 0$ ,  $b_i = 0$ ; для колових –  $b_i = 0$ , для ділянок побудованих по клотоїді –  $a_i \neq 0$ ,  $b_i \neq 0$ , причому на початку першої ділянки  $k_{01} = 0$ , а на границях переходу ділянок  $K_i(l_i) = K_{i+1}(l_i)$ .

Тоді закон зміни кривини за довжиною траси буде:

$$K(l) = \sum_{i=1}^n \{[(a_i + b_i(l-l_{i-1})) \cdot H[(l-l_{i-1})(l_i-l)]]\}, \quad (4)$$

де  $H[(l-l_{i-1})(l_i-l)]$  – функція Гевісайда, що рівна 1 тільки на  $i$ -ій ділянці та 0 – на інших,  $H[(l-l_{i-1})(l_i-l)] = \{1 + \text{sign}[(l-l_{i-1})(l_i-l)]\} / 2$ .

При проходженні автомобіля чергової  $m+1$ -ої ділянки ( $l_m \leq l < l_{m+1}$ ), біжучий кут повороту траси при зміні її кривини за залежністю (3) визначатиметься як:

$$\xi(l) = \xi_0 + a_{m+1}(l-l_m) + b_{m+1}(l-l_m)/2 + \sum_{i=1}^m [(a_i(l_i-l_{i-1}) + b_i(l_i-l_{i-1}))/2]. \quad (5)$$

При апроксимації залежності (4) гладкою кривою  $\xi = \bar{\xi}(l)$  координати біжучої точки  $E$  траси визначатимуться в параметричному вигляді як функція довжини траси:

$$X_E = X(l) = \int_0^l \cos[\bar{\xi}(l)] dl; \quad Y_E = Y(l) = \int_0^l \sin[\bar{\xi}(l)] dl. \quad (6)$$

Якщо смуга руху зміщена відносно серединної лінії траси по осі  $OY$  на віддаль  $u_\Delta$ , то за умови рівності граничних умов  $\bar{l}_{u0}(0) = \bar{l}_0(0)$  вона буде еквідистантою відносно серединної лінії траси і її рівняння в параметричному вигляді залежно від  $l$  буде:

$$X_u(l) = X(l) + \frac{u_\Delta \cdot Y_l'}{\sqrt{X_l'^2 + Y_l'^2}}; \quad Y_u(l) = Y(l) - \frac{u_\Delta \cdot X_l'}{\sqrt{X_l'^2 + Y_l'^2}}. \quad (7)$$

Довжина шляху  $l_u$  по смузі руху зв'язана із параметром траси  $l$  залежністю:

$$l_u = l - \Delta_\xi u_\Delta, \quad (8)$$

де  $\Delta_\xi$  – кут між векторами напрямку траси на її початку  $\bar{l}_0$  та в біжучій точці траси  $\bar{l}(l)$ ,  $\Delta_\xi = \xi(l) - \xi_0$ ;  $\xi_0 = \text{arctg}[Y_l'(0)/X_l'(0)]$ .

Вектор напрямку руху в біжучій точці  $E$  серединної траси  $\bar{l}_E(l)$  та в точці  $F_u$  смуги руху  $\bar{l}_{Fu}(l)$  з тим же параметром  $l$  будуть колінеарні, тобто  $\bar{l}_E(l) = \bar{l}_{Fu}(l)$ , де

$$\bar{l}_E(l) = X_l'(l) \cdot \bar{i} + Y_l'(l) \cdot \bar{j}; \quad \bar{l}_{Fu}(l) = X_l'(l) \cdot \bar{i} + Y_l'(l) \cdot \bar{j}.$$

Кривина смуги руху із кривиною траси зв'язана залежністю:

$$K_u(l_u) = \frac{K(l)}{1 - u_\Delta K(l)}. \quad (9)$$

Розміщення автомобіля на криволінійній трасі визначатиметься з однієї сторони параметрами пройденого автомобілем шляху, а з іншої – біжучим параметром траси  $l$ . Для побудови траєкторії руху автомобіля по трасі, розглянемо його велосипедну модель, в якій два передніх та два задніх коліс заміщені одним переднім та одним заднім уявними колесами, розміщеними на осі автомобіля, рис. 1.

При слідуванні за трасою кут повороту  $\theta$  уявного переднього колеса буде функцією часу  $\theta_t = \theta(t)$ . При цьому шлях, пройдений переднім колесом  $s_1 = l_u - A = l - \Delta_\xi u - A$ , де  $A$  – колісна база автомобіля. Відповідно, швидкість переднього колеса зв'язана із зміною в часі біжучого параметра розміщення автомобіля на трасі:

$$v_1 = dl_u / dt = dl / dt - u \cdot d\Delta_\xi / dt. \quad (10)$$

Співвідношення між елементарними переміщеннями уявного заднього  $ds_2$  та переднього  $ds_1$  коліс (задньої та передньої осей автомобіля), без врахування кутів відведення коліс буде:

$$ds_2 = ds_1 \cos\theta_t. \quad (11)$$

Із врахуванням кутів відведення, відповідно переднього  $\delta_1$  та заднього  $\delta_2$  коліс, залежність (10) прийме вигляд:

$$ds_2 \cos\delta_2 = ds_1 \cos(\theta_t - \delta_1). \quad (12)$$

Відповідно, співвідношення між їхніми швидкостями при русі із зміненим напрямом буде:

$$v_2 = v_1 \frac{\cos(\theta_t - \delta_1)}{\cos\delta_2}. \quad (13)$$

Якщо центр ваги автомобіля  $C(x_c; y_c)$  знаходиться від задньої осі на віддалі  $OC = b = \psi_c A$  від центра задньої осі  $O(x_o; y_o)$ , то елементарне переміщення центра ваги автомобіля буде

$$ds_c = ds_2 \cdot \sqrt{\cos^2 \delta_2 + \psi_c^2 \frac{\sin^2(\theta - \delta_1 + \delta_2)}{\cos^2(\theta - \delta_1)}}. \quad (14)$$

Розмістимо початок системи координат  $O_A x_A y_A$  автомобіля посередині задньої його осі, а вісь координат  $O_A x_A$  спрямуємо по осі автомобіля за напрямом руху. Відповідно при елементарному переміщенні т.  $O_A$  на  $ds_2$ , вісь  $O_A x_A$  разом із корпусом автомобіля повернеться на елементарний кут  $d\varphi$ , що рівний:

$$d\varphi = \frac{ds_1 \sin(\theta_t - \delta_1 + \delta_2)}{A \cos\delta_2} = \frac{ds_2 \sin(\theta_t - \delta_1 + \delta_2)}{A \cos(\theta - \delta_1)}. \quad (15)$$

Миттєва кутова швидкість повороту автомобіля відносно вертикальної осі буде:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_1 \sin(\theta_t - \delta_1 + \delta_2)}{A \cos\delta_2} = \frac{v_2 \sin(\theta_t - \delta_1 + \delta_2)}{A \cos(\theta_t - \delta_1)}. \quad (16)$$

Радіус та кривина траєкторії руху переднього  $(R_1; k_1)$  та заднього  $(R_2; k_2)$  коліс:

$$R_1 = \frac{ds_1}{d\varphi} = \frac{A \cos\delta_2}{\sin(\theta_t - \delta_1 + \delta_2)}; \quad (17)$$

$$k_1 = \frac{\sin(\theta_t - \delta_1 + \delta_2)}{A \cos\delta_2}; \quad (18)$$

$$R_2 = \frac{ds_2}{d\varphi} = \frac{A \cos(\theta_t - \delta_1)}{\sin(\theta_t - \delta_1 + \delta_2)}; \quad (19)$$

$$k_2 = \frac{\sin(\theta_t - \delta_1 + \delta_2)}{A \cos(\theta_t - \delta_1)}. \quad (20)$$

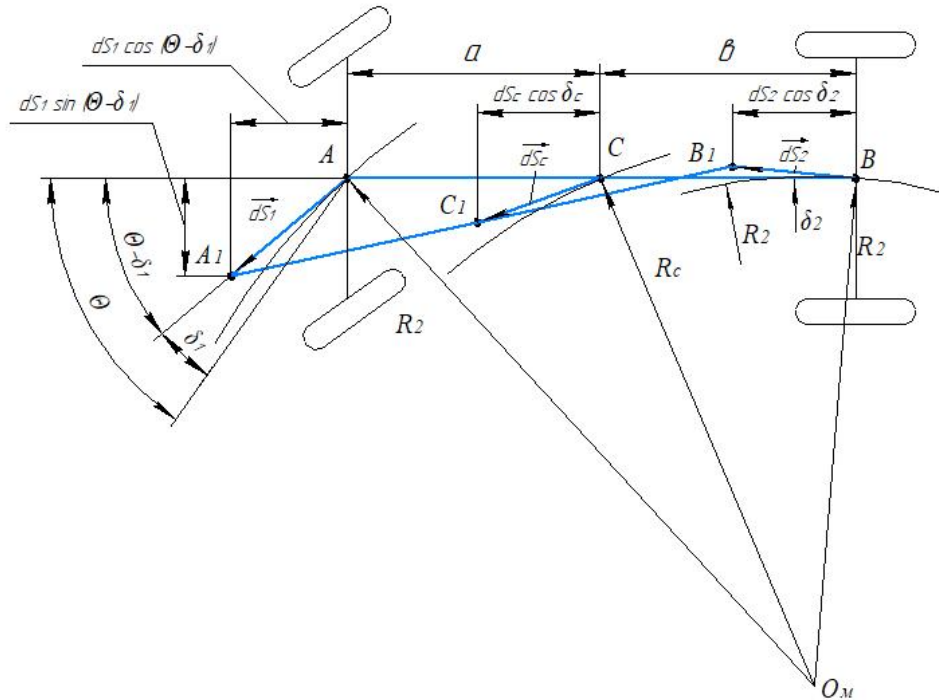


Рисунок 1 – Схема до визначення взаємозв'язку повороту коліс із траєкторією руху автомобіля

Із (18) та (20) слідує, що функціональний зв'язок кривин  $k_1$  та  $k_2$  визначається кутами повороту передніх коліс  $\theta$  та кутами відведення  $\delta_1$  та  $\delta_2$ .

$$k_2 = \frac{k_1 \cos(\delta_2)}{\cos(\theta_t - \delta_1)} \quad (21)$$

Радіус  $R_C$  та кривина  $k_C$  траєкторії руху центра ваги автомобіля:

$$R_C = \frac{ds_C}{d\varphi} = R_2 \sqrt{\cos^2 \delta_2 + \psi_C^2 \frac{\sin^2(\theta - \delta_1 + \delta_2)}{\cos^2(\theta - \delta_1)}}; \quad (22)$$

$$k_C = \frac{k_2 \cos^2(\theta - \delta_1)}{\sqrt{\cos^2 \delta_2 \cos^2(\theta - \delta_1) + \psi_C^2 \sin^2(\theta - \delta_1 + \delta_2)}}. \quad (23)$$

Залежності кривин траси (2) чи (3) та смуги (9) однозначно описують геометрію плоскої траси. Якщо переднє колесо автомобіля завжди слідуватиме посередині своєї смуги, то  $k_1 = K_{Au}(l_{Au})$ , де  $l_{Au} = l_u + A$ . Відповідно кут повороту уявного переднього колеса для слідування серединою смуги має змінюватись за законом:

$$\theta_t = \theta(l_A) = \arcsin(K_{Au} A \cos \delta_2) + \delta_1 - \delta_2, \quad (24)$$

де  $l_1 = l_{Au} = \int_0^{t_1} v_1(t) dt$  – біжуча довжина шляху переднього уявного колеса по середині смуги руху автомобіля.

Миттєвий центр обертання корпусу автомобіля  $C_{\omega}(x_{C\omega}; y_{C\omega})$  у власній системі координат буде:

$$x_{C\omega} = \frac{A \operatorname{tg} \delta_2}{\operatorname{tg}(\theta - \delta_1) + \operatorname{tg} \delta_2}; \quad y_{C\omega} = \frac{A}{\operatorname{tg}(\theta - \delta_1) + \operatorname{tg} \delta_2}. \quad (25)$$

При відомих координатах центра ваги автомобіля  $C_m(x_M; y_M)$ , радіус його повороту при русі по криволінійній трасі

$$R_M = \sqrt{(x_{C\omega} - x_M)^2 + (y_{C\omega} - y_M)^2}. \quad (26)$$

При русі автомобіля по криволінійній трасі на нього діятимуть інерційні сили  $F_{\omega} = mv_C^2 k_C$  від дії відцентрового прискорення  $a_r = v_C^2 k_C$ . Для забезпечення курсової стійкості автомобіля відцентрові прискорення не повинні перевершувати певної долі прискорення земного тяжіння. Тоді допустиме відцентрове прискорення можна встановити як  $a_r = k_g g$ , де  $k_g$  - коефіцієнт, що залежить від типу автомобіля та його стану, погодних умов, стану дорожнього полотна тощо. Відповідно швидкість автомобіля по трасі не повинна перевищувати максимальної на ділянках великої кривини. Прирівнявши  $k_C = K_u(l_u)$  визначимо закон зміни максимально допустимої швидкості по трасі:

$$v_{\text{дон}}(l_u) = \sqrt{\frac{k_g g}{K_u(l_u)}}. \quad (27)$$

При перебудові автомобіля із однієї смуги на іншу, його траєкторія руху відв'язується від траси смуги. При цьому важливо мінімізувати час переходу із однієї смуги на іншу при допустимому рівні динамічних навантажень без ривків. Останнє досягається, коли функція, що описує лінію руху автомобіля при переході на іншу смугу та її перша і друга похідні будуть гладкими функціями.

Таким вимогам у повній мірі відповідає лінія, що визначається гіперболічним тангенсом і для прямої траси має вигляд:

$$y(x) = \frac{u \cdot \tanh[\lambda(x - Q/2)] + u}{2} = \frac{u \cdot e^{\lambda(2x-Q)}}{1 + e^{\lambda(2x-Q)}}. \quad (28)$$

де  $u$  – віддаль між осьовими лініями сусідніх смуг (ширина смуги);  $\lambda$  – параметр згладжування кривої перебудови, визначає її розтягнутість;  $Q$  – довжина ділянки протягом якої проходить перебудова смуг руху автомобіля.

Виберемо мале поперечне переміщення  $\varepsilon_Q$ , яке суттєво не впливає на динаміку автомобіля і визначення його траєкторії та приймемо, що  $y(0) = \varepsilon_Q$ . Тоді згідно (28) довжина ділянки перебудови  $Q$  визначається із умови:

$$Q = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{u - \varepsilon_Q}{\varepsilon_Q} \right). \quad (29)$$

де  $\varepsilon_Q$  – параметр відхилення лінії гіперболічного тангенса від осі смуги, який є несуттєвим для зміни траєкторії руху автомобіля і який визначає початок його входження в передову смугу,  $\varepsilon_Q \leq 0,01$ .

Вигляд лінії перебудови для різних значень параметру  $\lambda$  для смуг шириною  $u = 3$  м на ділянці довжиною 40 м наведена на рис. 2.

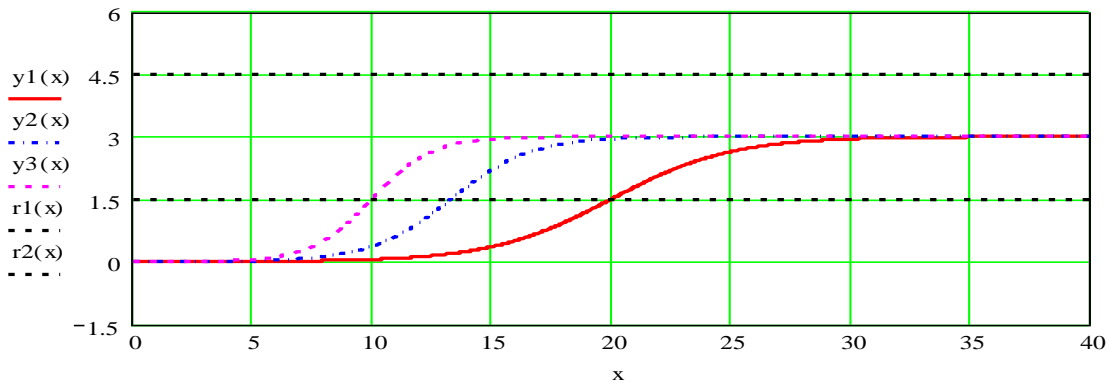


Рисунок 2 – Траскторії перебудови автомобіля із однієї смуги на іншу для різних значень параметру згладжування траскторії руху (по мірі зростання довжини перебудови):  $\lambda = 0,4 \text{ м}^{-1}$ ;  $\lambda = 0,3 \text{ м}^{-1}$ ;  $\lambda = 0,2 \text{ м}^{-1}$

Зміна напрямку руху при перебудові смуг визначається функцією:

$$y'(x) = dy/dx = 0,5\lambda u \operatorname{sech}^2[\lambda \cdot (x - Q/2)], \quad (30)$$

яка приймає максимальне значення в т.  $x = Q/2$ , де рівна  $y'(Q/2) = 0,5\lambda \cdot u$ .

Довжина лінії перебудови визначається із залежності  $s_Q = \int_0^Q \sqrt{1 + y_x'^2} dx$ .

Із врахуванням того, що  $y'(x) \ll 0$ , приймемо  $s_Q = \int_0^Q (1 + y_x'^2 / 2) dx = Q + 0,5 \int_0^Q y_x'^2 dx$ .

Друга похідна функції відповідає за динаміку руху автомобіля і визначається за залежністю:

$$y''(x) = d^2y/dx^2 = -\lambda^2 u \tanh[\lambda(x - Q/2)] \operatorname{sech}^2[\lambda(x - Q/2)]. \quad (31)$$

Функція (28) має два екстремуми, що рівні:

$$y_{ext}'' = \pm k_\lambda \lambda^2 u, \quad (32)$$

де  $k_\lambda$  – коефіцієнт рівний  $k_\lambda = 0,385$ .

Для пологих ліній перебудови автомобіля з однієї смуги на іншу його кривина визначається за залежністю:

$$K_x = y''(x) / \sqrt{1 + y'^2} = k_K y''(x). \quad (33)$$

де  $k_K$  – коефіцієнт приведення,  $k_K = 0,96$ .

Відповідно, на автомобіль діятимуть інерційні сили  $F_\omega = mv^2 K_x$  від дії відцентрового прискорення  $a_r = v^2 K_x$ . Для забезпечення курсової стійкості автомобіля обмеження по допустимому відцентрову прискоренню при перебудові автомобіля по смугах накладає обмеження на вибір траскторії перебудови залежно від швидкісного режиму руху. Із врахуванням (27), (32) та (33) – параметр згладжування кривої перебудови  $\lambda$  повинен бути не більше:

$$\lambda = \sqrt{\frac{k_g g}{k_\Sigma v^2 u}}, \quad (34)$$

де  $k_\Sigma = k_K k_\lambda$  – комплексний коефіцієнт впливу траскторії руху при перебудові на динаміку автомобіля.

Якщо перебудова автомобіля із однієї смуги на іншу відбувається за траєкторією, що описується (28), то, із врахуванням (29) та (34), то довжина ділянки перебудови має становити

$$Q = v \sqrt{\frac{k_{\Sigma} u}{k_g g}} \ln \left( \frac{u - \varepsilon_Q}{\varepsilon_Q} \right). \quad (35)$$

У випадку, коли перебудова на іншу смугу проводиться на криволінійній ділянці траси, то розрахунок впливу швидкісного режиму руху на траєкторію перебудови проводиться аналогічно із врахуванням того, що кривини траси (2) чи (3) та кривини перебудови (32) додаються, що вносить зміни в розрахунок відцентрового прискорення.

**Висновки.** Розроблена модель за відомими параметрами розміщення траси та законом побудови траєкторії руху автомобіля дозволяє визначити всі кінематичні та динамічні параметри його руху та встановити взаємозв'язок зміни кута повороту передніх коліс залежно від кривини траси. Важливим є встановлення допустимих режимів руху автомобіля залежно від параметрів траси та швидкісного режиму руху автомобіля, та при зміні його траєкторії, зокрема при перебудові руху із однієї смуги на іншу. Встановлено, що уникнути суттєвих динамічних впливів, які могли б порушити курсову стійкість, дозволяє вибір плавних траєкторій проходження траси та її зміни. Цим вимогам у повній мірі відповідає рух автомобіля по кривих, що описуються залежністю (28). Така модель дозволяє визначити кінематичний та динамічний режим проходження трас та вибирати безпечні режими проходження траси та оцінювати параметри ділянок перебудови руху по смугах.

Рух по криволінійній траєкторії призводить до перерозподілу сил та моментів, що діятимуть на автомобіль. Вони врівноважуються реакціями на чотирьох колесах, і встановлення кінематичного та динамічного режиму руху дозволяє в подальшому уточнити динаміку автомобіля в цілому, використовуючи ітераційний процес. На першій ітерації визначаються усереднені кути відведення передніх  $\delta_1$  та задніх  $\delta_2$  коліс за дією інерційної сили від відцентрового прискорення. На подальших ітераціях уточнюється перерозподіл сил на реальні колеса і від велосипедної моделі переходять до моделі чотирьох колісного автомобіля з уточненням кінематичного та динамічного режимів руху автомобіля.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Макаров В. А., Волохов О. С. Моделювання руху автомобіля з урахуванням тягової сили й перерозподілу маси. *Автомобільний транспорт*. 2013. В. 32. С. 23–28.
2. Макаров В. А., Волохов А. С., Куплінов А. В. До питання вибору математичної моделі для дослідження курсової стійкості руху легкового автомобіля. *Наукові нотатки : міжвузівський збірник*. Луцьк, 2010. Вип. 28. С. 311–316.
3. Розвиток математичної моделі криволінійного руху двовісного автомобіля / Б. І. Кальченко [та ін.]. *Вісник Нац. техн. ун-ту "ХПІ" : зб. наук. пр. Сер. : Автомобіле- та тракторобудування*. Харків : НТУ "ХПІ", 2017. № 13 (1235). С. 45–50.
4. Вербицький В. Г., Макаров В. А., Костенко А. В. До питання визначення та аналізу показників курсової стійкості руху легкового автомобіля. *Вісті Автомобільно-дорожнього інституту*. 2009. № 2 (9). С. 21–25.
5. Волохов О. С. Поліпшення стійкості автомобілів категорії М1 у неусталених режимах руху : автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук : 05.22.02 – автомобілі та трактори ; Національний університет "Львівська політехніка". Львів, 2013. 22 с.
6. Andriy Andrukhiv, Bohdan Soki, Mariia Sokil, Yuriy Vovk, Michael Levcovych. The influence of the cinematic parameters of movement and sprung mass vibrations of wheeled



vehicles on the move along the curvedlinear sections of the way. *ICCPT 2019: Current Problems of Transport: Proceeding of the 1st International Scientific Conference*, Ternohil, Ukraine, May, 28–29, 2019. p. 259–264.

7. Sokil B., Lyashuk O., Sokil M., Popovich P., Vovk Y. and Perenchuk O. Dynamic Effect of Cushion Part of Wheeled Vehicles on Their Steerability. *International Journal of Automotive and Mechanical Engineering*. 2018. Volume 15, Issue 1. pp. 4880–4892.

8. Мандрика В. Р., Шликова В. Г. Керованість і стійкість руху автомобіля В-класу з системою ESP. *Вісник Нац. техн. ун-ту "ХПІ" : зб. наук. пр. Темат. вип. : Транспортне машинобудування*. Харків : НТУ "ХПІ". 2013. № 31 (1004). С. 60–65.

9. Довжик М. Я., Калнагуз О. М., Сіренко Ю. В. Криволінійний рух чотирьохколісної машини з використанням супутникової навігаційної системи. *Наукові горизонти*. 2020. № 7 (92). С. 126–135.

10. Сіренко Ю. В. Траєкторія повороту машини з використанням супутникової навігаційної системи. *Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції "Молодь і технічний прогрес в АПВ". Інноваційні розробки в аграрній сфері*. Том 2. 17–18 травня 2021 р. Харків: ХНТУСГ, 2021. С. 123–126.

## REFERENCES

1. Makarov V. A. Modeljvannja rukhu avtomobilja z urakhuvannjam tjaghovoji syly j pererospodilu masy. V. A. Makarov, O. S. Volokhov. *Avtomobiljnyj transport*. – 2013. – V. 32. – S. 23–28.

2. Makarov V. A. Do pytannja vyboru matematychnoji modeli dlja doslidzhennja kursovoji stijkosti rukhu leghkovogho avtomobilja / V. A. Makarov, A. S. Volokhov, A. V. Kuplinov // *Naukovi notatky : mizhvuzivsjkyj zbirnyk*. – Lucjk, 2010. – Vyp. 28. – S. 311–316.

3. Rozvytok matematychnoji modeli kryvolinijnogho rukhu dvovisnogho avtomobilja / B. I. Kaljchenko [ta in.] // *Visnyk Nac. tekhn. un-tu "KhPI" : zb. nauk. pr. Ser. : Avtomobile- ta traktorobuduvannja*. – Kharkiv : NTU "KhPI", 2017. # 13 (1235). – S. 45–50.

4. Verbycjkyj V.Gh. Do pytannja vyznachennja ta analizu pokaznykiv kursovoji stijkosti rukhu leghkovogho avtomobilja / V. Gh. Verbycjkyj, V. A. Makarov, A. V. Kostenko // *Visti Avtomobiljno-dorozhnjogho instytutu*. – 2009. – № 2 (9). – S. 21–25.

5. Volokhov O. S. Polipshennja stijkosti avtomobiliv katehoriji M1 u neustalenykh rezhymakh rukhu : avtreferat dysertaciji na zdobuttja naukogho stupenja kandydata tekhnichnykh nauk : 05.22.02 – avtomobili ta traktory / Oleksandr Serghijovych Volokhov ; Nacionaljnyj universytet "Ljvivsjka politehnika". – Ljviv, 2013. – 22 s.

6. Andrij Andrukhiv, Bohdan Soki, Mariia Sokil, Yuriy Vovk, Michael Levcovych. The influence of the cinematic parameters of movement and sprung mass vibrations of wheeled vehicles on the move along the curvedlinear sections of the way // *ICCPT 2019: Current Problems of Transport: Proceeding of the 1st International Scientific Conference*, Ternohil, Ukraine, May, 28–29. – 2019. – p. 259–264.

7. B. Sokil, O. Lyashuk, M. Sokil, P. Popovich, Y. Vovk and O. Perenchuk. Dynamic Effect of Cushion Part of Wheeled Vehicles on Their Steerability (2018) *International Journal of Automotive and Mechanical Engineering*. 2018. – Volume 15, Issue 1. – pp. 4880–4892.

8. Mandryka V. R. Kerovanistj i stijkistj rukhu avtomobilja B-klasu z systemoju ESP / V. R. Mandryka, V. Gh. Shlykova // *Visnyk Nac. tekhn. un-tu "KhPI" : zb. nauk. pr. Temat. vyp. : Transportne mashynobuduvannja*. – Kharkiv : NTU "KhPI". – 2013. – № 31 (1004). – S. 60–65.

9. Dovzhyk M. Ja. Kryvolinijnyj rukh chotyrykhkolisnoji mashyny z vykorystannjam suputnykovoji navighacijnoji systemy / M. Ja. Dovzhyk, O. M. Kalnaghuz, Ju. V. Sirenko // *Naukovi ghorizonty*. – 2020. – № 7 (92). – S. 126–135.

10. Sirenko Ju. V. Trajektorija povorotu mashyny z vykorystannjam suputnykovoji navighacijnoji systemy. *Materialy Mizhnarodnoji nauково-praktychnoji konferenciji "Molodj i tekhnichnyj prohres v APV"*. *Innovacijni rozrobky v aghrarnij sferi*. Том 2. 17–18 travnja 2021 r. Kharkiv: KhNTUSGh, 2021. S. 123–126.

**Рогатинский Р. М., Ляшук О. Л., Гевко И. Б., Хорошун Р. В. МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ АВТОМОБИЛЯ ПО КРИВОЛИНИЧЕСКОЙ ТРАССЕ**

*В статье рассматривается вопрос обеспечения курсовой устойчивости автомобиля на этапе сборки и выбора траектории движения автомобиля по плоскостной трассе с условиями минимизации негативных динамических воздействий. Достижение указанной цели обеспечивается установлением закономерностей выбора скоростного режима движения и рациональной траектории движения автомобиля и, соответственно, закона изменения угла поворота колес в зависимости от параметров трассы, в частности, ее кривины. Исходными данными для разработанной модели являются параметры трассы и ее участков согласно техническим требованиям на строительство и дистанционного зондирования, по которым определяются бегущие параметры кривины трассы и ее полос.*

*Траектория движения автомобиля задается как параметрическая функция пути пройденного задними колесами с учетом изменения угла наклона колес по трассе, по которой определены траектории движения колес и автомобиля и их кривины. Согласование кривин трассы и траектории движения позволило установить безопасные кинематические режимы движения автомобиля по криволинейной трассе.*

*Движение по криволинейной траектории приводит к перераспределению сил и моментов, действующих на автомобиль. Они уравниваются реакциями на четырех колесах, и установка кинематического и динамического режима движения позволяет в дальнейшем уточнить динамику автомобиля в целом, используя итерационный процесс. На последующих итерациях уточняется перераспределение сил на реальные колеса и от велосипедной модели переходят к модели четырех колесных автомобилей с уточнением кинематического и динамического режимов движения автомобиля.*

*Построена модель перестройки движения автомобиля с одной полосы в другую по гладкой функции перехода на основе гиперболических функций. Установлены особенности кинематического и динамического режима движения по предложенному переходу с выбором кривой перехода и установлению безопасных параметров участков перехода в зависимости от скоростного режима движения автомобиля.*

**Ключевые слова:** модель, автомобиль, угол наклона колес, курсовая устойчивость автомобиля, кривина трассы.

**Rogatynskiy R., Lyashuk O., Hevko I., Horoshyn R. CAR MOTION MODEL ON A CURVED LINE**

*The article discusses the issue of ensuring the exchange rate stability of the car at the stage of assembly and the choice of the trajectory of the car along a flat track with the conditions for minimizing negative dynamic effects. Achievement of this goal is ensured by establishing the patterns of choosing the speed mode of movement and the rational trajectory of the vehicle and, accordingly, the law of changing the angle of rotation of the wheels depending on the parameters of the track, in particular, its curvature. The initial data for the developed model are the parameters of the route and its sections in accordance with the technical requirements for construction and remote sensing, according to which the running parameters of the curvature of the route and its stripes are determined.*

*The vehicle trajectory is specified as a parametric function of the path traveled by the rear wheels, taking into account the change in the angle of inclination of the wheels along the track, along which the trajectories of the wheels and the vehicle and their curvature are determined. Coordination of the curvatures of the track and the trajectory of movement made it possible to establish safe kinematic modes of movement of the car along a curved track.*

*Moving along a curved path leads to a redistribution of forces and moments acting on the car. They are balanced by the reactions on the four wheels, and the setting of the kinematic and dynamic driving modes allows further refinement of the dynamics of the vehicle as a whole using an iterative process. At subsequent iterations, the redistribution of forces to real wheels is clarified and from the bicycle model they pass to the model of four-wheeled vehicles with the specification of the kinematic and dynamic modes of vehicle movement.*

*A model is built for restructuring the movement of a car from one lane to another according to a smooth transition function based on hyperbolic functions. The features of the kinematic and dynamic mode of movement on the proposed transition with the choice of the transition curve and the establishment of safe parameters of the transition sections depending on the speed mode of the vehicle are established.*

**Keywords:** car, model, wheel angle, cars stability, track curvature.

© Рогатинський Р. М., Ляшук О. Л., Гевко І. Б., Хорошун Р. В.

Статтю прийнято  
до редакції 8.11.21